Quand la Gazette m'a demandé un texte sur Patrick, je me suis plongé dans les centaines de mails échangés entre 1996 et 2019. J'en extrais ci-dessous quelques passages. Ce texte est donc constitué essentiellement de souvenirs personnels d'une amitié de 23 ans.

Notre premier contact remonte à 1996, à la suite de l'article [1] qu'il avait écrit pour la Gazette (j'étais à l'époque dans le comité éditorial).

"Nous ne nous connaissons pas directement je crois, mais Marc Hindry m'a dit qu'il t'avait confié le papier que j'ai envoyé à la Gazette, et donc, tu dois savoir que je me suis intéressé de près aux tresses dans les derniers temps. Je pense qu'il faudrait que nous en discutions directement."

Comme c'est expliqué dans [1], Patrick, venant de la théorie des ensembles, était arrivé à s'intéresser aux tresses à partir de l'étude des systèmes autodistributifs, c'est-à-dire des lois de composition vérifiant la condition $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ (a \circ c)$, et du fait que le monoïde des tresses positives à n brins agit sur S^n si S est un système autodistributif. Cette action s'étend partiellement en une action du groupe de tresses. À partir de cette action Patrick construit son ordre sur le groupe de tresses (voir par exemple le chapitre 2 de [3]).

Les groupistes de leur côté ont commencé à s'intéresser aux tresses à partir de l'étude des représentations des groupes réductifs finis. Depuis les travaux de Deligne et Lusztig en 1975, le passage obligé pour étudier ces représentations est la cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig. Au milieu des années 90 Broué et Michel ont généralisé ces variétés qui au départ sont associées aux éléments du groupe de Weyl, en associant des variétés analogues aux éléments du monoïde de tresses (monoïde d'Artin-Tits). Avec Jean Michel nous avions alors étudié les formes normales des éléments des groupes d'Artin-Tits telles qu'elles apparaissent dans les travaux de Thurston, de Deligne et de Charney.

Ma première rencontre avec Patrick a eu lieu en septembre 1996 lors de journées "Algorithmique des tresses" à Strasbourg organisées par Christian Kassel. L'idée de cette rencontre était de rassembler les différentes communautés s'intéressant aux tresses (groupistes, topologues de la basse dimension, combinatoriciens...). Ce fut le début de contacts de plus en plus personnels : journées groupes de tresses, invitations réciproques à plusieurs colloques, création du GDR tresses en 2001, à l'initiative de Patrick qui en fut le premier directeur. Rencontres et discussions ont suivi lors des réunions régulières de ce GDR. Ce fut l'occasion de quelques discussions animées ; je me souviens de l'une d'elles, autour de quelques verres de bon vin, à l'occasion d'un colloque du GDR dans l'île de Berder : quelle était la bonne terminologie ? Jusque là on parlait de "petits groupes gaussiens" ("small Gaussian groups" ou "thin Gaussian groups"). Quels étaient les axiomes à prendre ou à laisser dans la définition ? Cette rencontre au sommet (Patrick, David Bessis, Jean Michel, Luis Paris, et moi) fixa le vocabulaire : ce seront des "groupes de Garside" et la définition précise sera :

Un monoïde de Garside est une paire (M, Δ) telle que

- M est un monoïde simplifiable et atomique.
- M est un treillis pour la divisibilité à gauche et pour la divisibilité à droite.
- Δ (appelé élément de Garside) a les mêmes diviseurs à gauche et à droite.

— Ces diviseurs sont en nombre fini et engendrent M.

On dit alors que le groupe des fractions de M est un groupe de Garside. Le monoïde se plonge dans son groupe comme un groupe de fractions et tout élément a une forme normale comme produit de diviseurs de Δ avec certaines conditions. L'intérêt de ces formes est en particulier qu'elles sont algorithmiquement calculables et qu'elles pemettent de résoudre le problème des mots et le problème de la conjugaison dans le groupe, à la suite des idées de Garside [4], reprises et généralisées par Elrifai et Morton puis par Birman, Gonzales et Gebhardt. Les groupes de tresses (d'Artin-Tits) associés à des groupes de Coxeter finis sont des groupes de Garside, ainsi que certains groupes de tresses associés à des groupes de réflexions complexes. Ceci a été utilisé (ainsi que l'extension de la notion aux catégories) pour la solution du problème du $K(\pi, 1)$ par Bessis ainsi que pour prouver l'automaticité de ces groupes par Charney.

C'est donc lors de ce colloque en 2001 qu'est née la "théorie de Garside", bien que Patrick ait réfuté plusieurs fois le mot "théorie", jugeant qu'il ne s'agit pas d'une théorie mais que c'est simplement une certaine propriété des mots dans un monoïde, propriété généralisée plus tard aux (petites) catégories, permettant d'obtenir les formes normales en question. Le mot théorie est néanmoins resté.

Puis ce fut le projet en 2008 de l'ANR "TheoGar" sur les théories de Garside (pilotée par Luis Paris) qui, après 6 mois de discussions, corrections, formulaires administratifs à faire et à refaire, a pu démarrer en 2009. Le projet annonçait la rédaction d'un livre "Finally, we intend to write a book that would be a reference on the subject". Je ne suis pas sûr qu'en écrivant cette phrase nous savions à quoi nous nous engagions. L'écriture de notre livre "à dix mains" Foundations of Garside Theory [2] nous a occupé 7 ans. L'idée initiale d'écrire un livre date de 2007 et la version finale a été envoyée à l'éditeur en décembre 2014. Ce travail a donné lieu à bien d'autres discussions, souvent sur des détails de rédaction ou de bibliographie. Patrick a fait un travail considérable. Il a réécrit tous les chapitres de la première à la 700ème page pour obtenir une homogénéité de style et de notations : "Mais oui, il faut t'y faire avec moi : je passe mon temps à reprendre les trucs pour les améliorer et les peaufiner". "Si ça reste dur [à lire], c'est que je n'ai pas encore atteint à la qualité espérée". Sous son impulsion les axiomes ont été de plus en plus dépouillés et les notions généralisées, pour aboutir à la notion de famille de Garside dans une catégorie. Un monoïde de Garside est devenu un cas particulier de catégorie (à un objet) possédant une famille de Garside finie, à savoir les diviseurs de l'élément de Garside.

Nos échanges de mails sont remplis d'apostrophes, avec une pointe d'humour potache ; par exemple quand l'idée du livre germait : "Je ne sais pas si on arrivera à se mettre d'accord sur quelque chose, mais, a priori, ca me paraît un projet sympa, et une excellente occasion de se fâcher durablement avec vous tous… "

Il y a eu bien d'autres moments partagés avec Patrick au fil de ces années : jogging dans la neige à Banff, dans les calanques à Luminy, autour de l'île de Tatihou ou de l'île de Berder, autour de chez lui à Arnières… Nos rencontres sont devenues familiales avec Arlette et mon épouse Claude. Des similitudes nous rapprochaient : la montagne, la musique, la course à pied, le vélo, nos enfants d'âges voisins. Lui qui avait fait beaucoup de montagne mais avait un peu raccroché, s'étant mis au vélo, je l'ai entraîné à l'ascension en famille de la Grande Ruine dans le massif des Écrins. Tous les ans nous nous retrouvions au festival de musique à la basilique de Saint-Denis. Nous l'avons emmené à un concert de jazz, lui qui était plutôt musique classique. Lui essayait de me persuader de me mettre à l'orgue : il avait acheté récemment un orgue de salon électronique dont les programmes permettent de jouer sur de nombreux orgues du monde entier, un exemple d'un de ses traits de caractère, toujours renouveler et élargir ses intérêts : laisser l'alpinisme pour le vélo en montagne puis le VTT, se mettre au triathlon, après le piano essayer l'orgue, apprendre le chinois après le russe, construire un cloître dans son jardin, passer de la théorie des ensembles à l'algorithmique des tresses...

Références

[1] P. Dehornoy, Une autre application de la théorie des ensembles *Gazette des mathématiciens* **69** (1996)

[2] P. Dehornoy, F. Digne, E. Godelle, D. Krammer, J. Michel, Foundations of Garside theory. EMS Tracts in Mathematics 22 (2015)

[3] P. Dehornoy, I. Dynnikov, D. Rolfsen, B. Wiest, Why are braids orderable ? *Panoramas et synthèses* **14** SMF (2002)

[4] F.A. Garside, The braid group and other groups *Quarterly J. Math.* **20** (1969) 235–254