Patrick DEHORNOY et la théorie des ensembles
(par Serge Grigorieff, professeur émérite, Université de Paris)

Au regard de sa bibliographie, il est patent que l'algèbre, particulièrement la théorie des tresses, est le centre du travail de Patrick Dehornoy. Cependant, c'est en logique et en théorie des ensembles, que Patrick a débuté sa carrière de chercheur avec des travaux qui sont, aujourd'hui encore, une référence ([1], 1978, [2], 1983, [3], 1986). Et, tout au long des années, il est resté passionné par ce sujet, organisant au CIRM le bisannuel "International Set Theory Workshop", ce de 1990 à 2004, avant d'en passer la direction à d'autres. Ce qui lui a permis d'échanger avec le haut de gamme des spécialistes du sujet et de rester pleinement au fait de ses avancées.

Quelques mots (techniques...) sur ces travaux de Patrick permettront de voir comment ceux-ci l'ont mené à cette loi d'auto-distributivité gauche si présente dans ses travaux sur les tresses, cf. [4], 1995. Et aussi de rendre hommage au souci qu'il a constamment montré, cf. [5], [6], 2018, de faire connaître la beauté des grands cardinaux de théorie des ensembles et leur intérêt pour répondre à certaines questions des mathématiques usuelles dont on sait que, sans supposer l'existence de ces cardinaux, elles ne sont ni prouvables ni réfutables (un phénomène pressenti par Gödel il y a plus de 60 ans).

Le travail de Patrick en théorie des ensembles, avec l'axiomatisation ZFC (ZF pour Zermelo et Fraenkel, 1922, C pour l'axiome du choix), tourne autour des ultrapuissances itérées de modèles de ZFC. Si M_0 est un tel modèle, à partir d'un ultrafiltre U sur un ensemble I, on obtient un autre modèle $M_1 = M_0^I/U$ de ZFC qui satisfait les mêmes propriétés que M_0. Ceci en quotientant l'ensemble M_0^I des fonctions de I dans M_0 par l'équivalence $f =_{M_1} g \iff \{i \mid f(i) = g(i)\} \in U$ et en y définissant une appartenance $\in_{M_1}$ pareillement en remplaçant $=$ par $\in$ (ces $=$ et $\in$ sont au sens de M_0). Un plongement φ s'impose alors : celui qui à un élément x de la structure de départ M_0 associe la classe d'équivalence de la fonction constante sur I de valeur x. Plongement non trivial si U ne l'est pas. Cela étant, dans un modèle de ZFC, les ordinaux jouent un rôle central, ils en forment une sorte de colonne vertébrale. Une propriété puissante, dans ce cadre d'ultrapuissances, est d'avoir dans M_1 la même notion d'ordinal que dans M_0 (à isomorphisme près). Ceci revient à demander que l'appartenance $\in_{M_1}$ de M_1 soit une relation bien fondée au sens de M_0 (pas seulement de M_1). C'est le cas si l'ultrafiltre U est une mesure, c'est-à-dire est clos par intersection dénombrable. Car si $(f_n)_{n=0,1,\ldots}$ est une suite de fonctions $I \to M_0$ telle que $f_{n+1} \in_{M_1} f_n$ pour tout n, alors $X_n = \{i \in I \mid f_{n+1}(i) \in f_n(i)\} \in U$ pour tout n. Puisque U est une mesure, on a $X = \cap_{n=0,1,\ldots} X_n \in U$, et, pour tout tout i de X, on a donc $f_{n+1}(i) \in f_n(i)$ pour tout n. Ainsi, l'appartenance au sens de M_0 ne serait pas bien fondée, contredisant les axiomes de ZFC.

Mais là, on arrive à un chapitre fort complexe, celui des grands cardinaux. En effet, ces cardinaux mesurables (c'est-à-dire supportant un ultrafiltre qui soit une mesure) sont gigantesques, très loin des objets usuels. Et la théorie ZFC ne permet pas de prouver leur existence ! Celle-ci est un axiome qu'on doit rajouter à la théorie. Hélas, comme pour la théorie ZFC elle-même, la cohérence de cet axiome n'est pas démontrable, et n'est même pas démontrable en admettant celle de ZFC. La seule "garantie" qu'on ait de la cohérence de ZFC (resp. avec cet axiome) est que depuis plus de 100 (resp. 60) ans que l'on travaille avec, aucune contradiction n'est apparue !

Comme M_1 est inclus dans M_0, il est a priori plus petit, mais cette inclusion, restriction de l'identité, n'est pas l'objet mathématique intéressant. C'est le plongement φ de M_0 sur une partie propre de M_1 qui l'est, et celui-ci montre M_0 comme plus petit que M_1 ! En itérant, on a un modèle M_2 qui est l'ultrapuissance de M_1 par l'ultrafiltre $\varphi(U)$ sur $\varphi(I)$ et un plongement ψ de M_1 dans M_2. Voyant φ comme l'union de ses restrictions à des ensembles dans M_0 de plus en plus gros, on peut appliquer ψ à chacune de ces restrictions et, par union, appliquer ψ à φ lui-même. Comme φ envoie x sur φx, son image $\psi\varphi$ envoie ψx sur $\psi(\varphi x)$. On a donc $\psi(\varphi x) = (\psi\varphi)(\psi x)$. Ce qui est une auto-distributivité gauche. C'est là que Patrick a rencontré, tout au début de sa carrière, cette loi qui intervient si fortement dans ses travaux en algèbre.

C'est alors qu'il préparait sa thèse de 3ème cycle (1975) puis sa thèse d'État (1978), sur le domaine de la théorie des ensembles, sur lequel je travaillais alors, que j'ai connu Patrick. Nous avions à cette époque beaucoup d'échanges et je me souviens avoir été impressionné tant par sa capacité de travail, qui ne se démentira pas par la suite (voir sa bibliographie) que par la diversité des autres activités qu'il menait avec une réelle maîtrise : piano, navigation, ... Je me souviens aussi que son goût pour ce qui est algébrique l'avait conduit à s'adresser à Jean-Louis Verdier pour le sujet de seconde thèse de sa thèse d'état (pratique aujourd'hui révolue...). Je le vois encore, lors de sa soutenance, déclarer avec humour après l'exposé de sa seconde thèse "qu'il avait bien travaillé", ce en dépliant sur les tables du premier rang occupées par le jury un très long listing informatique (ces feuilles à picots pliées en accordéon) contenant les calculs algébriques sophistiqués qu'il avait menés sur des algèbres de Lie. Eh, non, à cette époque on ne disposait pas encore de logiciel de calcul formel..., Patrick avait dû écrire lui-même les programmes qui lui étaient nécessaires.

Puis, la séparation géographique, lui à Caen, moi à Lyon puis Paris, ne nous a pas permis de beaucoup nous voir. Ce jusqu'en 2015, quand Patrick m'a demandé d'être relecteur du livre de théorie des ensembles qu'il avait décidé d'écrire. Pendant un peu plus de deux ans, au fur et à mesure qu'il en écrivait les chapitres, j'ai donc eu le grand plaisir de le rencontrer pour en discuter.

Des huit livres que Patrick a écrits, le premier et l'avant-dernier concernent la logique : l'un présente la théorie classique de la calculabilité ([7], 1993, 208 pages), l'autre est ce livre sur la théorie des ensembles ([8], 2017, 650 pages). J'ai pu constater avec ce livre son souci d'accompagner le développement – forcément technique – de la théorie par de très nombreuses digressions donnant les intuitions, le pourquoi des choses, les limites des résultats présentés,... Ce qui rend son livre remarquablement éclairant. Il faut souligner aussi l'audace de Patrick qui n'hésite pas à présenter la théorie jusqu'à ses résultats les plus sophistiqués, amenant le lecteur à l'état actuel du sujet.

Ce livre a été aussi pour lui une occasion forte de présenter les raisons d'étudier les grands cardinaux, un point qui lui tenait très à cœur. En effet, comme dit plus haut, ils sont indispensables pour dépasser le "on ne peut ni prouver ni réfuter à partir de ZFC" certaines questions des mathématiques usuelles. C'est ainsi, qu'entre autres exemples, il développe au chapitre XIV §3.1 de son livre une question simple à exprimer (mais à prouver, pas du tout) sur les tables de Laver, lesquelles sont des structures combinatoires finies définies par une induction ... qui est une loi d'auto-distributivité gauche.

Terminons par une autre illustration de son humour. Ayant été relecteur de son livre, il m'en a offert un exemplaire avec une dédicace ... écrite en russe.

Articles de journaux
[1] Iterated ultrapowers and Prikry forcing, Ann. Math. Logic 15 (1978) 109-160
[2] An application of iterated ultrapowers, J. Symb. Logic 48-2 (1983) 225-235
[3] Turing complexity of the ordinals, Inform. Proc. Letters 13 (1986) 167-170

Article de synthèse
[4] From large cardinals to braids via distributive algebra, J. Knot Theory & Ramifications 4-1 (1995) 33-79

Articles grand public
[5] Deux malentendus sur la théorie des ensembles, Les 5 minutes Lebesgue, 2018. Transparents de conférence
[6] La théorie des ensembles cinquante ans après Cohen, Grenoble, Colloquium mathalp 2018. Transparents de conférence

Livres
[7] Complexité et décidabilité, Springer, 1993, 208 pages, Birhauser, 2000
[8] La thorie des ensembles, Calvage et Mounet, 2017, 650 pages

Les références [4] à [6] sont télćhargeables sur les sites

pour [4]	https://dehornoy.users.lmno.cnrs.fr/surveys.html
pour [5] et [6]	https://dehornoy.users.lmno.cnrs.fr/conferences.html