Une généralisation du théorème de Liouville effectif pour les variétés projectives

François Ballaÿ
Université Clermont Auvergne

La version effective du théorème de Liouville (1844) peut s'énoncer de la façon suivante. Étant donné un nombre réel algébrique α de degré $d = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] \geq 2$ sur $\mathbb{Q}$, il existe une constante explicite $c(\alpha) > 0$ telle que pour tout $p/q \in \mathbb{Q}$,

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c(\alpha)}{q^d}.$$

En particulier, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il n'existe qu'un nombre fini de nombres rationnels p/q satisfaisant l'inégalité $|\alpha - p/q| < q^{-(d+\varepsilon)}$.

Nous démontrerons une généralisation de ce résultat valable pour les points fermés d'une variété projective définie sur un corps de nombres. Ce résultat repose sur la démonstration d'une version effective d'un cas particulier d'un théorème remarquable de géométrie diophantienne, dû à Faltings et Wüstholz [FW]. Notre résultat peut s'interpréter comme une version effective d'un théorème récent de McKinnon et Roth [MR], qui met en lumière les propriétés diophantiennes de la constante de Seshadri.

[FW] Gerd Faltings et Gisbert Wüstholz : Diophantine approximations on projective spaces. Invent. Math., 116(1-3):109-138, 1994.

[MR] David McKinnon et Mike Roth : An analogue of Liouville's Theorem and an application to cubic surfaces. Eur. J. Math., 2(4):929-959, 2016.