Théorie des éléments d'Eisenstein supérieurs dans le module supersingulier et les symboles modulaires

Emmanuel Lecouturier
Université Paris 7

Soient N et p deux nombres premiers tels que p divise le numérateur de $\frac{N-1}{12}$. Il existe alors, selon Mazur, une forme modulaire parabolique de poids 2 et niveau $\Gamma_0(N)$ congrue modulo p à la série d'Eisenstein de même poids et niveau. Soit I l'idéal d'Eisenstein dans l'algèbre de Hecke agissant sur $S_2(\Gamma_0(N))$. Nous définissons dans n'importe quel module de Hecke sur $\mathbf{F}_p$ des éléments canoniques, appelés *éléments d'Eisenstein supérieurs*, qui ont (entre autre) la propriété d'être annulés pas une puissance de l'idéal d'Eisenstein.

Nous calculons de manière explicite les deux premiers éléments de cette hiérarchie dans le cas du module des symboles modulaires et du module supersingulier (le module libre sur $\mathbf{F}_p$ engendré par les courbes elliptiques supersingulières sur $\mathbf{F}_N$). Cela a de nombreuses conséquences, dont des critères pour savoir si le $\mathbf{Z}_p$-rang de l'algèbre de Hecke complétée en l'idéal $I + (p)$ est strictement plus grand que 2 (ce qui répond en partie à une question de Mazur dans son papier sur l'idéal d'Eisenstein)