Le type de symétrie des algèbres de quaternions totalement définies

Didier Lesesvre
Université Paris 13

Pólya et Hilbert ont suggéré une interprétation des zéros des fonctions L en termes de valeurs spectrales pour des opérateurs. Pour ces derniers, Montgomery [MO] constate dans les années 50 que la distribution des valeurs propres de matrices aléatoires s'équirépartissent selon une même loi. Katz et Sarnak [KS] prouvent que c'est universellement le cas pour tous les groupes classiques. Analoguement, Rudnick et Sarnak [RS] prouvent que les zéros de fonctions L s'équirépartissent selon la même loi, semblant ainsi universelle.

Toutefois, quand on se concentre sur les petites valeurs propres (proches de 1), des propriétés plus fines apparaissent. Pour les matrices, Katz et Sarnak [KS] ont prouvé que les petites valeurs propres des groupes classiques s'équirépartissent selon seulement quatre lois possibles, définissant le *type de symétrie* du groupe.

Qu'en est-il pour les petits zéros de fonctions L (proches de 1/2) ? Katz et Sarnak [KS] conjecturent qu'il n'y a également que les quatre groupes de symétrie possibles. Plus précisément, notons les zéros des fonctions $L(s,\pi)$ associées aux représentations automorphes π d'un groupe classique.

$$\rho_\pi = \frac{1}{2} + i\gamma_\pi$$

Après renormalisation par leur espacement moyen, on introduit la densité des petits zéros, où ϕ est une fonction Schwartz,

$$D(\pi,\phi) := \sum_{\gamma_\pi} \phi\left(\frac{\gamma_\pi}{2\pi}\log c(\pi)\right)$$

Puisque ϕ est essentiellement à support compact, $D(\pi,\phi)$ mesure la densité des zéros proches du point central $s = \frac{1}{2}$. Le comportement de cette densité est très variable, toutefois une moyenne sur une famille assez grande de formes automorphes a de bien meilleures propriétés. On introduit, pour une famille $\mathcal{F}$ tronquée par un paramètre X :

$$E(\mathcal{F}_X,\phi) := \frac{1}{|\mathcal{F}_X|}\sum_{\pi\in\mathcal{F}_X} D(\pi,\phi)$$

Analoguement aux résultats obtenus pour les matrices, cette quantité qui mesure la distribution des petits zéros est attendue s'équirépartir selon quelques lois, celles des groupes classiques :

Conjecture. Pour toute fonction Schwartz, et toute bonne famille $\mathcal{F}$, on a :

$$\lim_{X\to\infty} E(\mathcal{F}_X, \phi) = \int_{\mathbf{R}} \phi(x) W_{\mathcal{F}}(x) \mathrm{d}x$$

et $W_{\mathcal{F}}$ est parmi quatre lois, qui sont celles obtenues pour les répartitions des valeurs propres des matrices aléatoires des groupes classiques.

Ce résultat a été prouvé par Iwaniec, Luo et Sarnak [ILS] pour le cas des formes cuspidales de GL_2. Nous nous proposons ici d'exposer le résultat analogue pour des algèbres de quaternions : on obtient un type de symétrie orthogonal.

[MO] H. L. Montgomery. The Pair Correlation of Zeros of the Zeta Function. *Bull. Amer. Math. Soc.*, pages 1-13, 1993.

[KS] N. M. Katz and P. Sarnak. Zeroes of Zeta Functions and Symmetry. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 36 :1-26, 1999.

[ILS] H. Iwaniec, W. Luo, P. Sarnak, Low Lying Zeroes of Families of L-Functions, *Pub. Sci. IHES*, 1998.

[RS] P. Sarnak and Z. Rudnick. Zeros of Principal L-functions and Random Matrix Theory, *Duke Math J.* pages 269-322, 1996.